

3.1 Sistem Persamaan Linear dalam Tiga Pemboleh Ubah



Memerihalkan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

Teliti harga pakej yang ditawarkan di sebuah panggung wayang dalam iklan di sebelah. Bagaimanakah cara untuk menentukan harga bagi sekeping tiket, sebotol minuman dan sebekas bertih jagung?

Tiga persamaan linear boleh dibentuk dengan pemboleh ubah x , y dan z masing-masing mewakili harga sekeping tiket, harga sebotol minuman dan harga sebekas bertih jagung.

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 13 \\2x + 2y + z &= 17 \\3x + 3y + 2z &= 27\end{aligned}$$

Persamaan linear yang dibentuk ini dikenali sebagai sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah. Sistem persamaan linear bermaksud, terdapat dua atau lebih persamaan linear yang melibatkan set pemboleh ubah yang sama. Bentuk umum bagi suatu persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah boleh ditulis seperti berikut:

$$ax + by + cz = d, \text{ dengan keadaan } a, b \text{ dan } c \text{ bukan sifar.}$$

Mari kita lihat cara sistem tiga persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah dapat digambarkan dalam bentuk satah tiga dimensi.

PAKEJ EKSKLUSIF PANGGUNG SUTERA

RM13 RM17 RM27

Masa terhad! Jangan lepaskan peluang!



IMBAS KEMBALI

Persamaan linear ialah persamaan dengan kuasa pemboleh ubahnya ialah 1.

INKUIRI 1

Berkumpulan

PAK-21

Tujuan: Memerihalkan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

Arahan:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada ketiga-tiga petak untuk memaparkan tiga satah bagi persamaan $x - 3y + z = 4$, $x - 3y + 3z = 4$ dan $x - 3y + 3z = 0$.
3. Perhatikan ketiga-tiga satah tersebut.
4. Bincang dengan rakan sekumpulan tentang pemerhatian anda dan catatkan hasil dapatan pada sehelai kertas.
5. Setiap kumpulan bergerak ke kumpulan yang lain untuk membandingkan hasil dapatan yang diperolehi.



ggbm.at/zpp8fk4k

Hasil daripada Inkuiri 1, didapati bahawa:

Sistem tiga persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah mempunyai tiga paksi, iaitu paksi- x , paksi- y dan paksi- z . Ketiga-tiga persamaan linear tersebut membentuk satah pada setiap paksi.

INKUIRI 2

Berkumpulan

PAK-21

Tujuan: Membandingkan sistem persamaan linear dalam dua pemboleh ubah dan tiga pemboleh ubah

Arahan:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada kedua-dua petak untuk memaparkan dua garis lurus.
3. Perhatikan kedua-dua garis lurus tersebut dan catatkan pemerhatian ahli kumpulan anda pada sehelai kertas.
4. Bandingkan hasil dapatan kumpulan anda dengan hasil dapatan dalam Inkuiri 1.
5. Bentangkan perbandingan tersebut di hadapan kelas.



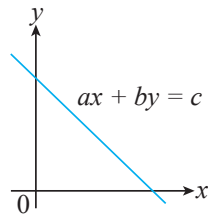
ggbm.at/daueydzzy

Hasil daripada Inkuiri 2, didapati bahawa hanya terdapat dua paksi, iaitu paksi- x dan paksi- y .

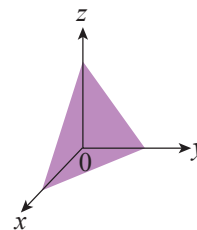
Setiap persamaan linear dalam dua pemboleh ubah membentuk garis lurus pada setiap paksi.

Amnya, persamaan linear dalam dua pemboleh ubah boleh ditulis sebagai $ax + by = c$ dengan a , b dan c adalah pemalar. Secara geometri, persamaan linear dalam dua pemboleh ubah yang dilakarkan pada suatu satah akan membentuk satu garis lurus seperti Rajah 1(a).

Persamaan linear yang mempunyai tiga pemboleh ubah pula boleh ditulis sebagai $ax + by + cz = d$ dengan a , b , c dan d adalah pemalar. Apabila dilakarkan, satu satah dalam ruang tiga dimensi akan terbentuk seperti Rajah 1(b).



Rajah 1(a)



Rajah 1(b)

Contoh 1

Perihalkan sama ada persamaan-persamaan yang berikut ialah sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah atau bukan.

(a) $2x + 4y - z = 10$
 $x + y = 10z^2$
 $5y - z - 2x = 3$

(b) $p + 8q - 4r = 2$
 $2(p + 6r) + 7q = 0$
 $10r + p = 5q$

Penyelesaian

- (a) Bukan, kerana terdapat persamaan yang mempunyai kuasa pemboleh ubah bernilai 2.
 (b) Ya, kerana ketiga-tiga persamaan mempunyai tiga pemboleh ubah, p , q dan r , dengan kuasa pemboleh ubah bernilai 1.

Latih Diri 3.1

1. Bentukkan persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah bagi pernyataan berikut.

Aiman membeli 3 helai seluar, 2 helai baju dan sepasang kasut.
Dia membelanjakan RM750 untuk semua barang yang dibeli.

2. Terangkan sama ada persamaan-persamaan yang berikut ialah suatu sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah atau bukan.

(a) $2m + 6(n - 2p) = 4$

$n = 5m + p$

$4m + p = \frac{2m}{5}$

(b) $e(12 - 6g) = f^2$

$8e + 6 - 2f - 9g = 0$

$17f + e = 6 + 2e$

(c) $7a - c = 6b$

$3 - 4c = 10a + b$

$\frac{a}{6} + 3b = 2(c + b)$



Menyelesaikan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

INKUIRI 3

Berkumpulan

Tujuan: Menyelesaikan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

Arahan:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada ketiga-tiga petak untuk memaparkan tiga satah bagi persamaan linear $2x + y + z = 3$, $-x + 2y + 2z = 1$ dan $x - y - 3z = -6$.
3. Adakah terdapat titik persilangan antara ketiga-tiga satah itu? Perhatikan titik persilangan yang terbentuk dan nyatakan titik persilangan (x, y, z) antara ketiga-tiga satah tersebut.
4. Tentukan sama ada titik persilangan (x, y, z) itu adalah penyelesaian bagi ketiga-tiga persamaan linear.
5. Catatkan pandangan setiap ahli kumpulan tentang perkaitan antara titik persilangan dengan penyelesaian persamaan linear dan bincangkan.



ggbm.at/pucgdzuh

Hasil daripada Inkuiri 3, persilangan antara ketiga-tiga satah yang terbentuk ialah penyelesaian bagi ketiga-tiga persamaan linear tersebut. Dalam kes ini, terdapat hanya satu penyelesaian sahaja kerana satah-satah tersebut bersilang hanya pada satu titik.

INKUIRI 4

Berkumpulan

Tujuan: Menyelesaikan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

Arahan:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada ketiga-tiga petak untuk memaparkan tiga satah bagi persamaan linear $x - 2y = 4$, $2x - 3y + 2z = -2$ dan $4x - 7y + 2z = 6$.
3. Adakah terdapat titik persilangan antara ketiga-tiga satah itu? Perhatikan titik persilangan yang terbentuk.
4. Catatkan pandangan setiap ahli kumpulan tentang perkaitan antara titik persilangan tersebut dengan penyelesaian persamaan linear dan bincangkan.



ggbm.at/z4spaqa

Hasil daripada Inkuiri 4, didapati ketiga-tiga satah bersilang pada satu garis lurus. Ini menunjukkan bahawa sistem persamaan linear ini mempunyai penyelesaian yang tak terhingga.

INKUIRI 5**Berkumpulan**

Tujuan: Menyelesaikan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

Arahan:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada ketiga-tiga petak untuk memaparkan tiga satah bagi persamaan linear $2x - 4y + z = 3$, $4x + 8y + 2z = 14$ dan $x - 2y + 0.5z = -1$.
3. Adakah terdapat titik persilangan antara ketiga-tiga satah itu?
4. Catatkan pandangan setiap ahli kumpulan dan bincangkan.



ggbm.at/f78fpv6h

Hasil daripada Inkuiri 5, didapati bahawa satah-satah bagi ketiga-tiga persamaan linear itu tidak bersilang pada mana-mana titik. Ini menunjukkan bahawa sistem persamaan linear ini tidak mempunyai penyelesaian.

Hasil daripada Inkuiri 3, 4 dan 5 menunjukkan bahawa terdapat tiga jenis penyelesaian yang melibatkan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah seperti yang ditunjukkan dalam rajah di bawah.



Sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah boleh diselesaikan dengan mencari nilai-nilai pemboleh ubah yang memuaskan ketiga-tiga persamaan linear itu. Kaedah yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah ialah kaedah penghapusan atau penggantian.

Langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah dengan menggunakan kaedah penghapusan dan penggantian adalah serupa dengan kaedah penyelesaian persamaan serentak dalam dua pemboleh ubah.

SUMBANG SARAN

Dengan menggunakan perisian *GeoGebra*, tentukan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah yang mempunyai;

- (a) satu penyelesaian sahaja,
- (b) penyelesaian tak terhingga.

IMBAS KEMBALI

Persamaan linear serentak dengan dua pemboleh ubah dapat diselesaikan dengan kaedah graf, kaedah penggantian atau kaedah penghapusan.

IMBAS KEMBALI

Terdapat tiga kes yang melibatkan penyelesaian persamaan serentak dengan dua pemboleh ubah. Apabila kedua-dua garis:

- Bersilang antara satu sama lain, persamaan mempunyai penyelesaian unik.
- Selari antara satu sama lain, persamaan tidak mempunyai penyelesaian.
- Bertindih antara satu sama lain, persamaan mempunyai penyelesaian tak terhingga.

Contoh 2

Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut dengan menggunakan kaedah penghapusan.

$$\begin{aligned}4x - 3y + z &= -10 \\2x + y + 3z &= 0 \\-x + 2y - 5z &= 17\end{aligned}$$

Penyelesaian

Pilih mana-mana dua persamaan.

$$\begin{aligned}4x - 3y + z &= -10 \quad \dots \textcircled{1} \\2x + y + 3z &= 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

Darabkan persamaan $\textcircled{2}$ dengan 2 supaya pemboleh ubah x mempunyai pekali yang sama.

$$\textcircled{2} \times 2: 4x + 2y + 6z = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

Hapuskan pemboleh ubah x dengan menolak $\textcircled{1}$ daripada $\textcircled{3}$.

$$\textcircled{3} - \textcircled{1}: 5y + 5z = 10 \quad \dots \textcircled{4}$$

Pilih lagi dua persamaan.

$$\begin{aligned}2x + y + 3z &= 0 \quad \dots \textcircled{5} \\-x + 2y - 5z &= 17 \quad \dots \textcircled{6}\end{aligned}$$

Darabkan persamaan $\textcircled{6}$ dengan 2 supaya pemboleh ubah x mempunyai pekali yang sama.

$$\textcircled{6} \times 2: -2x + 4y - 10z = 34 \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{5} + \textcircled{7}: 5y - 7z = 34 \quad \dots \textcircled{8}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} - \textcircled{8}: 12z &= -24 \\z &= -2\end{aligned}$$

Gantikan $z = -2$ ke dalam $\textcircled{8}$.

$$\begin{aligned}5y - 7(-2) &= 34 \\5y + 14 &= 34 \\5y &= 20 \\y &= 4\end{aligned}$$

Gantikan $y = 4$ dan $z = -2$ ke dalam $\textcircled{1}$.

$$\begin{aligned}4x - 3(4) + (-2) &= -10 \\4x - 12 - 2 &= -10 \\4x &= 4 \\x &= 1\end{aligned}$$

Maka, $x = 1$, $y = 4$ dan $z = -2$ ialah penyelesaian bagi sistem persamaan linear ini.

**PANTAS KIRA**

Menentukan penyelesaian dalam Contoh 2 dengan menggunakan kalkulator saintifik.

1. Tekan **MENU**.
2. Tekan **▼** sebanyak dua kali.
3. Tekan **ALPHA** **(-)**.
4. Tekan **1** untuk Simul Equation.
5. Tekan **3**.

6. Masukkan nilai pekali x , y dan z :

Tekan **4** **=** **-3** **=** **1** **=** **-10** **=** **2** **=** **1** **=** **3** **=** **0** **=** **-1** **=** **2** **=** **-5** **=** **17** **=**.

7. Skrin akan memaparkan:

x 1
Tekan **=**
 y 4
Tekan **=**
 z -2

Maka, $x = 1$, $y = 4$ dan $z = -2$.

Contoh 3

Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut dengan menggunakan kaedah penggantian.

$$\begin{aligned}3x - y - z &= -120 \\y - 2z &= 30 \\x + y + z &= 180\end{aligned}$$

Penyelesaian

$$3x - y - z = -120 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y - 2z = 30 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$x + y + z = 180 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{Daripada } \textcircled{1}, z = 3x - y + 120 \quad \dots \textcircled{4} \leftarrow \text{Ungkapkan } z \text{ dalam sebutan } x \text{ dan } y$$

Gantikan $\textcircled{4}$ ke dalam $\textcircled{2}$.

$$y - 2(3x - y + 120) = 30$$

$$y - 6x + 2y - 240 = 30$$

$$-6x + 3y = 270$$

$$y = 90 + 2x \quad \dots \textcircled{5} \leftarrow \text{Ungkapkan } y \text{ dalam sebutan } x$$

Gantikan $\textcircled{4}$ dan $\textcircled{5}$ ke dalam $\textcircled{3}$.

$$x + (90 + 2x) + [3x - (90 + 2x) + 120] = 180$$

$$x + 2x + 3x - 2x + 90 - 90 + 120 = 180$$

$$4x = 60$$

$$x = 15$$

Gantikan $x = 15$ ke dalam $\textcircled{5}$.

$$y = 90 + 2(15)$$

$$= 120$$

Gantikan $x = 15$ dan $y = 120$ ke dalam $\textcircled{3}$.

$$15 + 120 + z = 180$$

$$z = 45$$

Maka, $x = 15$, $y = 120$ dan $z = 45$ ialah penyelesaian bagi sistem persamaan linear ini.



Kaedah penghapusan Gauss juga boleh digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear. Layari pautan ini untuk mengetahui dengan lebih lanjut kaedah penghapusan Gauss.



bit.ly/2ITQAFI



Cabar Minda

Selesaikan Contoh 3 dengan kaedah penghapusan. Adakah anda mendapat penyelesaian yang sama?

Contoh 4

Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut.

$$x - y + 3z = 3$$

$$-2x + 2y - 6z = 6$$

$$y - 5z = -3$$

Penyelesaian

$$x - y + 3z = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$-2x + 2y - 6z = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$y - 5z = -3 \quad \dots \textcircled{3}$$

Oleh sebab persamaan $\textcircled{3}$ hanya mempunyai dua pemboleh ubah sahaja, iaitu y dan z , maka pemboleh ubah x dalam persamaan

$\textcircled{1}$ dan $\textcircled{2}$ perlu dihapuskan.

$$\textcircled{1} \times 2: 2x - 2y + 6z = 6 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} + \textcircled{2}: 0 + 0 + 0 = 12$$

$$0 = 12$$

Maka, sistem persamaan linear ini tiada penyelesaian kerana $0 \neq 12$.



Penyelesaian Contoh 4 menggunakan perisian GeoGebra.



ggbm.at/wxktwrwx

Contoh 5

Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut.

$$\begin{aligned} 3x + 5y - 2z &= 13 \\ -5x - 2y - 4z &= 20 \\ -14x - 17y + 2z &= -19 \end{aligned}$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} 3x + 5y - 2z &= 13 && \dots \textcircled{1} \\ -5x - 2y - 4z &= 20 && \dots \textcircled{2} \\ -14x - 17y + 2z &= -19 && \dots \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \times 2: 6x + 10y - 4z &= 26 && \dots \textcircled{4} \\ \textcircled{4} - \textcircled{2}: 11x + 12y &= 6 && \dots \textcircled{5} \\ \textcircled{1} + \textcircled{3}: -11x - 12y &= -6 && \dots \textcircled{6} \\ \textcircled{5} + \textcircled{6}: 0 + 0 &= 0 \\ &0 = 0 \end{aligned}$$

Darabkan persamaan

$\textcircled{1}$ dengan 2 untuk
menghapuskan
pemboleh ubah z

Maka, sistem persamaan linear ini mempunyai penyelesaian tak terhingga kerana $0 = 0$.

Latih Diri 3.2

1. Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut dengan kaedah penghapusan.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 7x + 5y - 3z &= 16 \\ 3x - 5y + 2z &= -8 \\ 5x + 3y - 7z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad 4x - 2y + 3z &= 1 \\ x + 3y - 4z &= -7 \\ 3x + y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

2. Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut dengan kaedah penggantian.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 2x + y + 3z &= -2 \\ x - y - z &= -3 \\ 3x - 2y + 3z &= -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad 2x + 3y + 2z &= 16 \\ x + 4y - 2z &= 12 \\ x + y + 4z &= 20 \end{aligned}$$



Menyelesaikan masalah melibatkan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah

Contoh 6

APLIKASI MATEMATIK

Tommy mempunyai tiga unit kondominium, iaitu jenis A dengan 1 bilik tidur, jenis B dengan 2 bilik tidur dan jenis C dengan 3 bilik tidur. Kesemua unit kondominium itu disewakan dan jumlah sewa yang diperolehi ialah RM1 240 sehari. Tommy perlu menyimpan 10% daripada harga sewa unit jenis A, 20% daripada harga sewa unit jenis B dan 30% daripada harga sewa unit jenis C untuk kos penyenggaraan. Jumlah simpanan sehari ialah sebanyak RM276. Harga sewa bagi unit jenis C adalah dua kali harga sewa bagi unit jenis A. Berapakah harga sewa sehari bagi setiap unit kondominium milik Tommy?

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- ◆ Jumlah sewa ialah RM1 240 sehari.
- ◆ Simpanan untuk kos penyenggaraan:
 - Unit jenis A ialah 10% daripada harga sewa.
 - Unit jenis B ialah 20% daripada harga sewa.
 - Unit jenis C ialah 30% daripada harga sewa.
- ◆ Jumlah simpanan sehari ialah RM276.
- ◆ Harga sewa unit jenis C adalah dua kali harga sewa unit jenis A.

2. Merancang strategi

- ◆ Tiga persamaan yang dibentuk melibatkan jumlah sewa sehari, jumlah simpanan sehari dan harga sewa jenis C.
- ◆ Katakan harga sewa unit jenis A ialah a , harga sewa unit jenis B ialah b dan harga sewa unit jenis C ialah c .

3. Melaksanakan strategi

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1\,240 & \dots \textcircled{1} \\ 0.1a + 0.2b + 0.3c &= 276 & \dots \textcircled{2} \\ c &= 2a & \dots \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \times 10: a + 2b + 3c &= 2\,760 & \dots \textcircled{4} \\ \textcircled{1} \times 2: 2a + 2b + 2c &= 2\,480 & \dots \textcircled{5} \\ \textcircled{4} - \textcircled{5}: -a + c &= 280 & \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

Gantikan $\textcircled{3}$ ke dalam $\textcircled{6}$.

$$-a + 2a = 280$$

$$a = 280$$

Gantikan $a = 280$ ke dalam $\textcircled{3}$.

$$c = 2(280)$$

$$= 560$$

Gantikan $a = 280$ dan $c = 560$ ke dalam $\textcircled{1}$.

$$280 + b + 560 = 1\,240$$

$$840 + b = 1\,240$$

$$b = 400$$

Harga sewa bagi unit kondominium jenis A ialah RM280, unit kondominium jenis B ialah RM400 dan unit kondominium jenis C ialah RM560.

4. Membuat refleksi

Jumlah harga sewa sehari

$$= 280 + 400 + 560$$

$$= \text{RM } 1\,240$$

Jumlah simpanan sehari

$$= 0.1(280) + 0.2(400) + 0.3(560)$$

$$= 28 + 80 + 168$$

$$= \text{RM}276$$

Latih Diri 3.3

1. Patricia telah melabur sebanyak RM24 500 dalam tiga amanah saham. Dia membahagi wang itu kepada tiga akaun amanah saham yang berbeza, P , Q dan R . Pada akhir tahun, dia telah mendapat keuntungan sebanyak RM1 300. Faedah tahunan bagi setiap akaun masing-masing ialah 4%, 5.5% dan 6%. Jumlah wang dalam akaun P adalah empat kali ganda jumlah wang dalam akaun Q . Berapakah jumlah wang yang telah dilaburkan dalam setiap akaun amanah saham itu?
2. Restoran Billy memesan 200 kuntum bunga sempena Hari Ibu. Mereka memesan bunga teluki yang berharga RM1.50 setiap satu, bunga mawar yang berharga RM5.75 setiap satu dan bunga daisi yang berharga RM2.60 setiap satu. Pesanan bagi bunga teluki adalah yang paling banyak manakala bilangan bunga mawar yang dipesan adalah 20 kuntum kurang daripada bunga daisi. Jumlah harga bagi kesemua bunga yang dipesan ialah RM589.50. Berapakah bilangan setiap jenis bunga yang dipesan?



3. Ramasamy ingin membeli beberapa batang pen, pensel dan buku nota untuk penggal sekolah yang akan datang. Dia mempunyai RM102 untuk dibelanjakan. Harga sebatang pen ialah RM5, sebatang pensel ialah RM3 dan sebuah buku nota ialah RM9. Ramasamy ingin menggunakan jumlah wang yang sama bagi pembelian pen dan pensel. Jumlah pen dan pensel yang dibeli juga perlu dalam bilangan yang sama dengan buku nota yang dibeli. Berapakah bilangan setiap item yang dibeli? Tulis satu sistem persamaan untuk menyelesaikan masalah ini.

Latihan Intensif 3.1Imbas kod QR atau layari bit.ly/2YqHPda untuk kuiz

- Bentukkan sistem persamaan linear berdasarkan situasi yang berikut dan jawab soalan yang diberi.
 - Hasil tambah sudut dalam sebuah segi tiga ialah 180° . Sudut yang paling besar ialah 20° lebih daripada hasil tambah dua sudut yang lain dan 10° lebih daripada tiga kali ganda sudut yang paling kecil. Berapakah ukuran setiap sudut dalam segi tiga tersebut?
 - Hasil tambah tiga nombor ialah 19. Jika nombor pertama didarab dengan 2, hasil tambah tiga nombor itu menjadi 22 dan jika nombor kedua didarab dengan 2, hasil tambahnya menjadi 25. Cari nilai bagi nombor-nombor tersebut.
- Selesaikan setiap persamaan berikut dengan kaedah penghapusan dan penggantian.

(a) $x + y + z = 3$	(b) $2x + y - z = 7$	(c) $x + y + z = 3$
$x + z = 2$	$x - y + z = 2$	$2x + y - z = 6$
$2x + y + z = 5$	$x + y - 3z = 2$	$x + 2y + 3z = 2$
(d) $2x - y + z = 6$	(e) $x + y + 2z = 4$	(f) $x + 2y + z = 4$
$3x + y - z = 2$	$x + y + 3z = 5$	$x - y + z = 1$
$x + 2y - 4z = 8$	$2x + y + z = 2$	$2x + y + 2z = 2$
- Sebuah bakeri membuat tiga jenis roti dengan kos pembuatan setiap bulan ialah RM6 850 untuk 2 150 buku roti. Kos untuk membuat sebuku roti mentega ialah RM2, sebuku roti coklat ialah RM3 dan sebuku roti kelapa ialah RM4. Harga jualan bagi sebuku roti mentega, sebuku roti coklat dan sebuku roti kelapa masing-masing ialah RM3, RM4.50 dan RM5.50. Jika keuntungan yang diperoleh setiap bulan ialah RM2 975, berapakah bilangan setiap jenis roti yang dibuat?
- Andrea menjual beberapa buah pasu yang berlainan saiz. Pasu bersaiz kecil berharga RM10, pasu bersaiz sederhana berharga RM15 dan pasu bersaiz besar berharga RM40. Setiap bulan, bilangan pasu bersaiz kecil yang dijual adalah sama dengan jumlah pasu bersaiz sederhana dan besar yang dijual. Bilangan pasu bersaiz sederhana yang dijual pula adalah dua kali bilangan pasu bersaiz besar yang dijual. Andrea perlu membayar sewa bagi premis jualannya sebanyak RM300 sebulan. Berapakah bilangan minimum pasu bagi setiap saiz yang mesti dijual supaya dia dapat membayar sewa premis jualannya itu?
- Encik Chong ingin membeli beberapa ekor ayam, arnab dan itik untuk ladangnya. Jumlah haiwan yang perlu dibeli ialah 50 ekor. Dia mempunyai RM1 500 untuk dibelanjakan. Seekor ayam berharga RM20, seekor arnab berharga RM50 dan seekor itik berharga RM30. Bilangan ayam dan itik yang dibeli adalah sama. Berapakah bilangan setiap haiwan yang dibeli oleh Encik Chong? Tulis satu sistem persamaan untuk menyelesaikan masalah ini.

3.2 Persamaan Serentak yang Melibatkan Satu Persamaan Linear dan Satu Persamaan Tak Linear



Menyelesaikan persamaan serentak melibatkan satu persamaan linear dan satu persamaan tak linear

INKUIRI 6

Berkumpulan

PAK-21

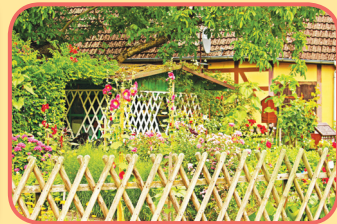
Tujuan: Mengenal persamaan serentak

Arahan:

1. Bentukkan beberapa kumpulan yang terdiri daripada tiga atau empat orang ahli.
2. Teliti setiap pernyataan yang berikut dan bentukkan persamaan yang terlibat.

PERNYATAAN 1

Chong mempunyai sebuah taman bunga yang berbentuk segi empat tepat. Panjang pagar yang digunakan untuk memagar sekeliling kawasan tamannya ialah 200 m. Luas taman itu ialah $2\,400\text{ m}^2$. Berapakah panjang dan lebar taman itu?



PERNYATAAN 2

Shida menjahit sehelai alas meja berbentuk segi empat tepat. Perimeter alas meja itu ialah 800 cm dan luasnya ialah $30\,000\text{ cm}^2$. Cari panjang dan lebar alas meja itu.



PERNYATAAN 3

Beza antara dua nombor ialah 9 dan hasil darab dua nombor itu ialah 96. Cari nilai nombor-nombor tersebut.

3. Jawab soalan-soalan yang berikut:
 - (a) Berapakah bilangan persamaan yang dapat dibentuk dalam setiap pernyataan?
 - (b) Berapakah bilangan pemboleh ubah yang terlibat?
4. Lakukan perbincangan antara ahli kumpulan dan catat hasil dapatan anda pada sehelai kertas.
5. Setiap kumpulan melantik seorang wakil untuk membentangkan hasil dapatan daripada kumpulan masing-masing di hadapan kelas.
6. Ahli kumpulan yang lain boleh bertanyakan soalan kepada wakil yang dilantik.
7. Ulang langkah 5 dan 6 sehingga semua kumpulan selesai melakukan pembentangan.

Hasil daripada Inkuiri 6, ketiga-tiga pernyataan tersebut masing-masing membentuk dua persamaan dengan dua pemboleh ubah, iaitu persamaan linear dan persamaan tak linear. Apakah ciri-ciri yang membezakan antara persamaan linear dan persamaan tak linear? Bagaimanakah cara untuk menyelesaikan persamaan serentak yang melibatkan persamaan linear dan persamaan tak linear?

INKUIRI 7

Individu

PAK-21

Tujuan: Meneroka titik persilangan antara persamaan linear dan tak linear

Arahan:

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada kedua-dua petak untuk memaparkan bentuk graf bagi persamaan $x + 2y = 10$ dan $y^2 + 4x = 50$.
3. Apakah kesimpulan yang boleh dibuat tentang titik-titik persilangan kedua-dua graf itu?



ggbm.at/dhzggca9

Hasil daripada Inkuiri 7, titik persilangan antara graf bagi persamaan linear $x + 2y = 10$ dan persamaan tak linear $y^2 + 4x = 50$ ialah penyelesaian bagi kedua-dua persamaan. Penyelesaian bagi kedua-dua persamaan ini dikenali sebagai penyelesaian persamaan serentak.

Penyelesaian persamaan serentak bermaksud mencari nilai-nilai pemboleh ubah yang memuaskan persamaan-persamaan tersebut. Persamaan serentak ini boleh diselesaikan dengan kaedah penghapusan, kaedah penggantian atau kaedah perwakilan graf.

Contoh 7

Selesaikan persamaan serentak yang berikut dengan menggunakan kaedah penggantian.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ y^2 + 5 &= 4x \end{aligned}$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 & \dots \textcircled{1} \\ y^2 + 5 &= 4x & \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

Daripada ①,

$$2x = 4 - y$$

$$x = \frac{4 - y}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

Jadikan x sebagai perkara rumus

Gantikan ③ ke dalam ②.

$$y^2 + 5 = 4\left(\frac{4 - y}{2}\right)$$

$$y^2 + 5 = 8 - 2y$$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$(y + 3)(y - 1) = 0 \quad \leftarrow \text{Selesaikan persamaan kuadratik dengan kaedah pefaktoran}$$

$$y = -3 \text{ atau } y = 1$$

Gantikan $y = -3$ dan $y = 1$ ke dalam ③.

$$x = \frac{4 - (-3)}{2} \quad \text{atau} \quad x = \frac{4 - 1}{2}$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

Maka, $x = \frac{7}{2}$, $y = -3$ dan $x = \frac{3}{2}$, $y = 1$ ialah penyelesaian bagi persamaan serentak ini.



Cabar Minda

Selesaikan Contoh 7 apabila y diungkapkan dalam sebutan x bagi persamaan linear $2x + y = 4$. Adakah anda akan memperoleh penyelesaian yang sama?



IMBAS KEMBALI

Persamaan kuadratik boleh diselesaikan dengan kaedah:

- (a) Pefaktoran
- (b) Rumus
- (c) Penyempurnaan kuasa dua

Contoh 8

Selesaikan persamaan serentak yang berikut dengan menggunakan kaedah penghapusan.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ x^2 - 2xy &= 3 \end{aligned}$$

Penyelesaian

$$2x + y = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 2xy = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 2x: 4x^2 + 2xy = 8x \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{3}: 5x^2 = 3 + 8x$$

$$5x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(5)(-3)}}{2(5)} \end{aligned}$$

Guna kaedah
rumus kuadratik

$$x = 1.9136 \quad \text{atau} \quad x = -0.3136$$

Gantikan $x = 1.9136$ ke dalam $\textcircled{1}$.

$$2(1.9136) + y = 4$$

$$3.8272 + y = 4$$

$$y = 0.1728$$

Gantikan $x = -0.3136$ ke dalam $\textcircled{1}$.

$$2(-0.3136) + y = 4$$

$$-0.6272 + y = 4$$

$$y = 4.6272$$

Maka, $x = 1.9136$, $y = 0.1728$ dan $x = -0.3136$, $y = 4.6272$ ialah penyelesaian bagi persamaan serentak ini.

Contoh 9

Selesaikan persamaan serentak yang berikut dengan menggunakan perwakilan graf.

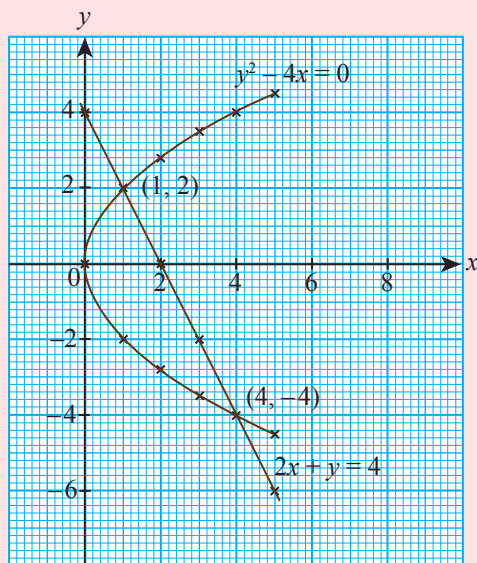
$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ y^2 - 4x &= 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian

Bina jadual untuk menentukan titik-titik yang perlu diplot.

x	0	1	2	3	4	5
Nilai y bagi persamaan $2x + y = 4$	4	2	0	-2	-4	-6
Nilai y bagi persamaan $y^2 - 4x = 0$	0	± 2	± 2.8	± 3.5	± 4	± 4.5

Bina graf berdasarkan nilai-nilai dalam jadual.



Graf di atas menunjukkan terdapat dua titik persilangan yang mewakili penyelesaian bagi kedua-dua persamaan. Maka, penyelesaian bagi persamaan serentak ini ialah $(1, 2)$ dan $(4, -4)$.



Selesaikan persamaan serentak berikut:
 $2x + y = x^2 - xy + y^2 = 7$.



Celik Teknologi

Penyelesaian Contoh 9 menggunakan perisian Desmos.



bit.ly/2KHpcbww

Latih Diri 3.4

1. Selesaikan persamaan serentak berikut dengan menggunakan kaedah penghapusan, penggantian atau perwakilan graf.

(a) $2x - y = 7$

(b) $5y + x = 1$

(c) $y = 3 - x$

$y^2 - x(x + y) = 11$

$x + 3y^2 = -1$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$

(d) $3x + 5y = 1$

(e) $2x + 4y = 9$

(f) $x + y - 4 = 0$

$x + 2y = \frac{4}{y}$

$4x^2 + 16y^2 = 20x + 4y - 19$

$x^2 - y^2 - 2xy = 2$

2. Selesaikan persamaan serentak berikut menggunakan perwakilan graf.

(a) Lukis graf bagi pasangan persamaan berikut dengan domain $-5 \leq x \leq 5$. Seterusnya, tentukan penyelesaian persamaan serentak berikut.

$2y - x = 1$

$xy + x^2 = 26$

(b) Lukis graf bagi pasangan persamaan berikut dengan domain $-3 \leq x \leq 4$. Seterusnya, tentukan penyelesaian persamaan serentak berikut.

$x - y = 2$

$4x^2 + 3y^2 = 36$

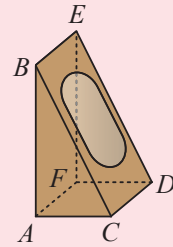


Menyelesaikan masalah melibatkan persamaan serentak

Contoh 10

APLIKASI MATEMATIK

Sebuah kilang pembungkusan makanan ingin membungkus dodol dalam sebuah bekas yang berbentuk prisma tegak dengan tapak segi empat sama seperti dalam rajah. Diberi jumlah panjang sisi prisma tegak itu ialah 133 cm dan $ED = BC = 25$ cm. Adakah seketul dodol dengan isi padu 600 cm^3 dapat dibungkus di dalam bekas tersebut? Jelaskan.



Penyelesaian

1. Memahami masalah

- ◆ Bekas berbentuk prisma tegak dengan tapak segi empat sama.
- ◆ Jumlah panjang sisi bekas = 133 cm
- ◆ $ED = BC = 25$ cm
- ◆ Menentukan sama ada dodol yang berisi padu 600 cm^3 dapat dibungkus ke dalam bekas.

2. Merancang strategi

- ◆ Katakan panjang sisi tapak bekas ialah x dan tinggi bekas ialah y .
- ◆ Bentukkan persamaan tak linear bagi panjang BC .
- ◆ Bentukkan persamaan linear bagi jumlah panjang sisi prisma.
- ◆ Isi padu prisma = luas keratan rentas $\times$ tinggi

4. Membuat refleksi

Isi padu bekas = 588

$$\frac{1}{2} \times 7 \times 24 \times x = 588$$

$$x = 7 \text{ cm}$$

Gantikan nilai $x = 7$ dalam persamaan ②

$$5(7) + 2y = 83$$

$$y = 24 \text{ cm}$$

3. Melaksanakan strategi

$$x^2 + y^2 = 25^2 \quad \dots \text{①}$$

$$5x + 2y + 50 = 133$$

$$5x + 2y = 83 \quad \dots \text{②}$$

Daripada ②,

$$y = \frac{83 - 5x}{2} \quad \dots \text{③}$$

Gantikan ③ ke dalam ①.

$$x^2 + \left(\frac{83 - 5x}{2}\right)^2 = 25^2$$

$$x^2 + \left(\frac{6889 - 830x + 25x^2}{4}\right) = 625$$

$$4x^2 + 25x^2 - 830x + 6889 - 2500 = 0$$

$$29x^2 - 830x + 4389 = 0$$

$$(29x - 627)(x - 7) = 0$$

$$x = \frac{627}{29} \quad \text{atau} \quad x = 7$$

Gantikan $x = \frac{627}{29}$ ke dalam ③.

$$y = \frac{83 - 5\left(\frac{627}{29}\right)}{2}$$

$$= -\frac{364}{29} \text{ (Abaikan)}$$

Gantikan $x = 7$ ke dalam ③.

$$y = \frac{83 - 5(7)}{2}$$

$$= 24$$

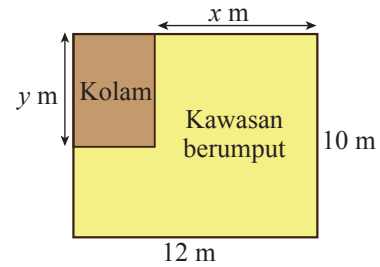
$$\text{Isi padu bekas} = \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times 24$$

$$= 588 \text{ cm}^3$$

Maka, dodol dengan isi padu 600 cm^3 tidak dapat dibungkus di dalam bekas tersebut kerana isi padu bekas tersebut ialah 588 cm^3 sahaja.

Latih Diri 3.5

1. Audy memotong sekeping papan berbentuk segi empat tepat dengan luas 72 cm^2 dan perimeter 34 cm . Hitung panjang dan lebar papan tersebut.
2. Rajah di sebelah menunjukkan pelan bagi sebuah taman berbentuk segi empat tepat yang akan dibina oleh Syarikat Pesona Alam. Terdapat sebuah kolam berbentuk segi empat tepat di bahagian bucu taman tersebut. Luas kawasan berumput ialah 96 m^2 dan perimeter kolam ialah 20 m . Hitung nilai x dan nilai y .



Latihan Intensif 3.2

Imbas kod QR atau layari bit.ly/2OtFRFb untuk kuiz



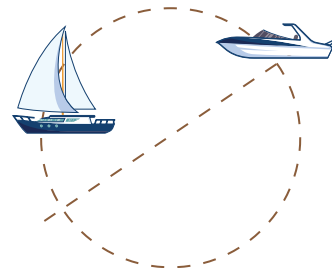
1. Selesaikan persamaan serentak yang berikut.
(a) $x - 3y + 4 = 0$
 $x^2 + xy - 40 = 0$
(b) $k - 3p = -1$
 $p + pk - 2k = 0$
2. Cari koordinat titik persilangan bagi lengkung $\frac{x}{y} - \frac{2y}{x} = 1$ dan garis lurus $2x + y = 3$.

3. Diberi $(-2, 2)$ ialah penyelesaian bagi persamaan serentak berikut:

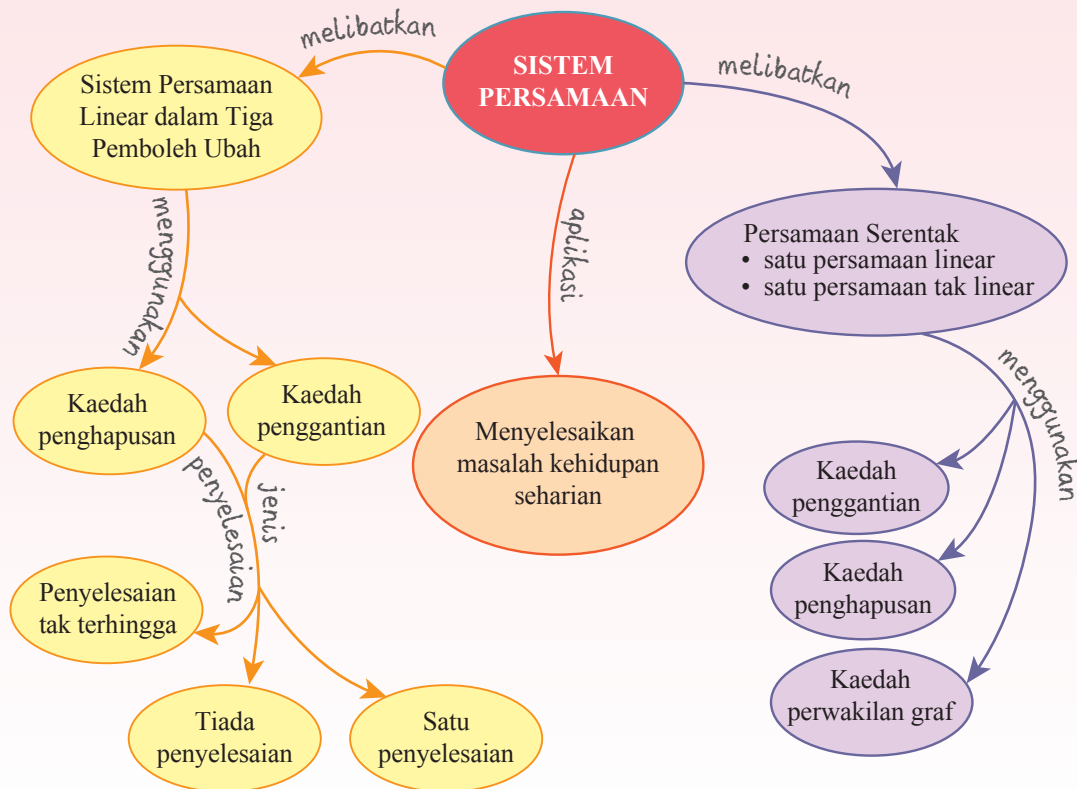
$$x + \frac{1}{2}y = \frac{h}{2} \text{ dan } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = k$$

Cari nilai h dan nilai k . Seterusnya, cari penyelesaian yang satu lagi.

4. Hipotenus bagi sebuah segi tiga bersudut tegak ialah $(2x + 3) \text{ cm}$. Panjang dua sisi yang lain masing-masing ialah $x \text{ cm}$ dan $(x + y) \text{ cm}$. Diberi perimeter segi tiga itu ialah 30 cm , hitung nilai x dan nilai y .
5. Diberi jumlah luas permukaan sebuah kuboid dengan tapak berbentuk segi empat sama ialah 66 cm^2 dan jumlah panjang sisi kuboid itu ialah 40 cm . Cari isi padu yang mungkin bagi kuboid tersebut.
6. Seekor ikan bergerak dalam keadaan membulat dengan persamaan lokusnya diberi sebagai $2x^2 + 11y^2 + 2x + 2y = 0$. Sebuah bot bergerak secara lurus dengan persamaan $x - 3y + 1 = 0$ dan bersilang dengan gerakan membulat ikan itu. Cari titik persilangan antara gerakan ikan dan bot tersebut.
7. Sebuah kapal layar bergerak secara membulat dengan keadaan persamaan lokusnya ialah $2x^2 + 4y^2 + 3x - 5y = 25$. Sebuah bot laju pula bergerak secara lurus dengan persamaan $y - x + 1 = 0$ dan bersilang dengan lokus bagi pergerakan kapal layar itu. Cari titik-titik persilangan antara pergerakan kapal layar dan bot laju tersebut.



RUMUSAN BAB 3



TULIS JURNAL ANDA

Fikirkan satu masalah di sekeliling anda yang dapat diselesaikan dengan menggunakan sistem persamaan linear dan tak linear. Formulasikan masalah tersebut dalam bentuk sistem persamaan linear dengan memberikan maksud pemboleh ubah yang digunakan. Nyatakan hubungan antara pemboleh-pemboleh ubah tersebut. Selesaikan sistem persamaan yang dibina. Kemudian, buat satu laporan yang berkaitan dengan masalah ini dan paparkan hasilnya di hadapan kelas.



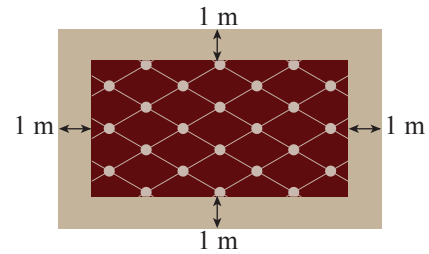
LATIHAN PENGUKUHAN

1. Bentukkan sistem persamaan linear dalam tiga pemboleh ubah bagi situasi yang berikut. **TP1**
 - (a) Abdullah membeli senaskhah buku Sejarah, dua naskhah buku Matematik dan tiga naskhah buku Sains dengan harga RM120. Chong pula membeli dua naskhah buku Sejarah, tiga naskhah buku Matematik dan dua naskhah buku Sains dengan harga RM110 manakala Kaladevie membeli senaskhah buku sejarah, empat naskhah buku Matematik dan dua naskhah buku Sains dengan harga RM180.
 - (b) Terdapat 30 keping duit syiling yang terdiri daripada duit syiling 10 sen, 20 sen dan 50 sen di dalam sebuah kotak. Jumlah nilai semua duit syiling ialah RM20.60. Salmah telah membeli aiskrim menggunakan dua keping duit syiling 50 sen dan tiga keping duit syiling 20 sen.
2. Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut. **TP2**
 - (a) $x - y + 2z = 3$
 $x + y - 3z = -10$
 $2x + y - z = -6$
 - (b) $x + 2y + 5z = -17$
 $2x - 3y + 2z = -16$
 $3x + y - z = 3$
3. Sudut kedua bagi sebuah segi tiga ialah 50° kurang daripada empat kali sudut yang pertama. Sudut yang ketiga ialah 40° kurang daripada sudut yang pertama. Cari nilai bagi setiap sudut dalam segi tiga itu. **TP3**
4. Diberi $(5, h)$ ialah satu penyelesaian bagi persamaan serentak yang berikut. **TP4**
$$h(x - y) = x + y - 1 = hx^2 - 11y^2$$

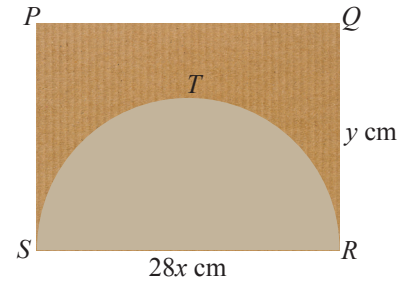
Cari nilai h dan penyelesaian yang lain bagi persamaan serentak itu.
5. Punca pendapatan Raju setiap bulan adalah daripada gaji tetapnya sebagai seorang pegawai pemasaran, sewaan rumah dan perniagaan dalam talian. Jumlah pendapatan bulanan Raju ialah RM20 000. Gaji bulanannya jika ditambah RM500 adalah 2 kali ganda daripada jumlah hasil sewaan rumah dan perniagaan dalam talian. Jumlah gaji bulanan dan perniagaan dalam talian pula ialah dua kali ganda sewaan rumah. Berapakah pendapatan bulanan Raju bagi setiap punca pendapatannya? **TP4**
6. Encik Abu menanam sayur-sayuran di atas sebidang tanah yang berbentuk segi tiga bersudut tegak. Diberi sisi paling panjang tanah tersebut ialah p meter. Dua lagi sisi masing-masing ialah q meter dan $(2q - 1)$ meter. Encik Abu telah memagar tanah tersebut dengan menggunakan pagar sepanjang 40 meter. Cari panjang dalam meter setiap sisi tanah itu. **TP4**
7. Buktikan bahawa suatu garis lurus yang melalui titik $(0, -3)$ menyalang suatu lengkung $x^2 + y^2 - 27x + 41 = 0$ pada titik $(2, 3)$. Adakah garis lurus itu akan menyalang lengkung itu pada titik yang lain? Jelaskan. **TP4**
8. Sekeping papan yang berbentuk segi empat berukuran y cm panjang dan $3x$ cm lebar. Seorang pekerja ingin memotong papan itu kepada dua keping papan kecil berbentuk segi tiga bersudut tegak. Perimeter bagi setiap segi tiga ialah 24 cm dan ukuran sisi terpanjang segi tiga itu ialah $(x + y)$ cm. Hitung luas papan asal, dalam cm^2 . **TP4**



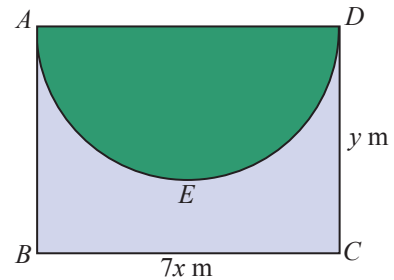
9. Rajah di sebelah menunjukkan pelan sebuah bilik yang berbentuk segi empat tepat. Sebidang karpet berbentuk segi empat tepat diletakkan pada jarak 1 m dari dinding bilik itu. Luas dan perimeter karpet itu masing-masing ialah 8.75 m^2 dan 12 m. Cari panjang dan lebar, dalam m, bagi bilik itu. **TP4**



10. Rajah di sebelah menunjukkan sekeping kadbod berbentuk segi empat tepat $PQRS$ dengan luas 224 cm^2 . Satu semibulatan STR telah dipotong daripada kadbod itu. Diberi perimeter kadbod yang tinggal ialah 72 cm, cari nilai x dan nilai y . **TP4**



11. Cikgu Chee Hong mengarahkan murid Tingkatan 4 Kembara untuk melukis mural pada dinding kantin sekolah yang berbentuk segi empat tepat dengan panjangnya $7x \text{ m}$ dan lebarnya $y \text{ m}$. Dua bentuk yang berbeza perlu dilukis pada dinding seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. AED berbentuk semibulatan. Diberi luas dinding itu ialah 28 m^2 dan perimeter $ABCDE$ ialah 26 m, cari diameter dan jejari bagi bentuk semibulatan itu. **TP5**



Penerokaan MATEMATIK

Encik Awang, seorang ahli kimia mempunyai tiga jenis larutan. Setiap hari dia akan membuat beberapa larutan mengikut sukatan yang ditentukan. Pada suatu hari, Encik Awang ingin membuat larutan yang menggunakan tiga jenis larutan. Larutan yang pertama mesti mengandungi 10% asid, larutan kedua mengandungi 40% asid manakala larutan yang ketiga pula mengandungi 60% asid. Encik Awang ingin menyediakan 1 000 liter campuran larutan yang mengandungi 45% asid. Bekalan larutan yang mengandungi 40% asid adalah dua kali bekalan yang mengandungi 10% asid. Bolehkah anda mencadangkan berapakah isi padu setiap larutan yang perlu digunakan oleh Encik Awang?

1. Tuliskan tiga persamaan daripada pernyataan di atas.
2. Tuliskan langkah kerja cadangan anda kepada Encik Awang.